

السلسلة 1	المتتاليات العددية حلول مقترحة			السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية
تمرين 1: $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$; $u_0 = 2$				
$u_3 = \frac{2}{5}u_2 + 1$ $u_3 = \frac{86}{125} + 1 = \frac{211}{125}$	$u_2 = \frac{2}{5}u_1 + 1$ $u_2 = \frac{18}{25} + 1 = \frac{43}{25}$	$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + 1$ $u_1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$	$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \end{cases}$	
تمرين 2: $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$; $u_0 = 1$				
$u_3 = 1 + \frac{1}{u_2}$ $u_3 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	$u_2 = 1 + \frac{1}{u_1}$ $u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$u_1 = 1 + \frac{1}{u_0}$ $u_1 = 1 + 1 = 2$	$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$	
<p>🌟 لاحظ أن حساب u_3 يرجع إلى حساب u_2 و u_1 و u_0 بالضرورة، ولذلك تسمى مثل هذه المتتاليات بالترجعية.</p>				
تمرين 3: $v_n = 3 \times 2^n + 1$ و $u_{n+1} = 2u_n - 1$; $u_0 = 4$				
$u_3 = 2u_2 - 1$ $u_3 = 26 - 1 = 25$	$u_2 = 2u_1 - 1$ $u_2 = 14 - 1 = 13$	$u_1 = 2u_0 - 1$ $u_1 = 8 - 1 = 7$	$u_0 = 4$	1
$v_3 = 3 \times 2^3 + 1$ $v_3 = 24 + 1 = 25$	$v_2 = 3 \times 2^2 + 1$ $v_2 = 12 + 1 = 13$	$v_1 = 3 \times 2^1 + 1$ $v_1 = 6 + 1 = 7$	$v_0 = 3 \times 2^0 + 1$ $v_0 = 3 + 1 = 4$	
<p>2 لنبين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times 2^n + 1$ بالنسبة لـ $n=0$، لدينا: $u_0 = 4$ و $3 \times 2^0 + 1 = 3 + 1 = 4$ منه: $u_0 = 3 \times 2^0 + 1$ نفترض أن: $u_n = 3 \times 2^n + 1$ و نبين أن: $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$ لدينا: $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(3 \times 2^n + 1) - 1 = 2 \times 3 \times 2^n + 2 - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$</p>				
<p>🌟 لاحظ أن نتيجة السؤال الأخير تعني أننا نستطيع إيجاد تعبير مباشر لبعض المتتاليات الترجعية، مما يسمح بحساب حدودها دون ضرورة حساب الحدود التي تسبقها.</p>				
تمرين 4: $u_{n+1} = 3u_n - 4$; $u_0 = 5$				
$u_3 = 3u_2 - 4$ $u_3 = 87 - 4 = 83$	$u_2 = 3u_1 - 4$ $u_2 = 33 - 4 = 29$	$u_1 = 3u_0 - 4$ $u_1 = 15 - 4 = 11$		1
<p>2 لنبين بالترجع أن $u_n > 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ بالنسبة لـ $n=0$، لدينا: $u_0 = 5$ منه: $u_0 > 2$ نفترض أن: $u_n > 2$ و نبين أن: $u_{n+1} > 2$ لدينا: $u_n > 2 \Rightarrow 3u_n > 6 \Rightarrow 3u_n - 4 > 6 - 4 \Rightarrow u_{n+1} > 2$</p>				
<p>3 لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4 = 2(u_n - 2) > 0$ إذن (u_n) تزايدية</p>				
<p>🌟 لاحظ أننا استعملنا السؤال الثاني لدراسة رتابة المتتالية وهذا الأمر يكون ضروريا في أغلب المتتاليات.</p>				
تمرين 5: $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right)$; $u_0 = 3$				
<p>1 لنبين بالترجع أن $u_n \geq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ بالنسبة لـ $n=0$، لدينا: $u_0 = 3$ منه: $u_0 \geq 2$ نفترض أن: $u_n \geq 2$ و نبين أن: $u_{n+1} \geq 2$</p>				

$$u_{n+1} \geq 2 : \text{لدينا } u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right) - 2 = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} - 4 \right) = \frac{1}{2} \frac{u_n^2 + 4 - 4u_n}{u_n} = \frac{(u_n - 2)^2}{2u_n} \geq 0$$

بالتالي: $u_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ أي أن u_n مصغورة بـ 2

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right) - u_n = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + 4 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{4 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(2 + u_n)(2 - u_n)}{2u_n}$$

وبما أن $u_n \geq 2$ (حسب السؤال السابق) فإن $2 - u_n \leq 0$ و $2 + u_n > 0$ و $2u_n > 0$ ومنه: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ وبالتالي: (u_n) تناقصية

لاحظ أننا استعملنا طريقة مغايرة للطريقة السابقة، لأن التأطير المباشر لا يؤدي للنتيجة المطلوبة.

$$\text{تمرين 6: } u_0 = 4 ; u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3 - 3(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - 3u_n - 6}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n - 3)(2u_n + 3) = 2u_n^2 + 3u_n - 6u_n - 9 = 2u_n^2 - 3u_n - 9$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}$$

لنبين بالترجع أن $u_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا: $u_0 = 4$ ، منه: $u_0 \geq 3$

نفترض أن: $u_n \geq 3$ و نبين أن: $u_{n+1} \geq 3$

وبما أن $u_n \geq 3$ (حسب الافتراض) فإن $u_n - 3 \geq 0$ و $2u_n + 3 > 0$ و $u_n + 2 > 0$

إذن حسب السؤال السابق $u_{n+1} - 3 \geq 0$ ومنه: $u_{n+1} \geq 3$

لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n - 3)(u_n + 1) = u_n^2 + u_n - 3u_n - 3 = u_n^2 - 2u_n - 3$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2}$$

بما أن $u_n \geq 3$ فإن: $u_n - 3 \geq 0$ و $u_n + 1 > 0$ و $u_n + 2 > 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$

وبالتالي: (u_n) تزايدية

لاحظ أن تقنية استعمال الفرق جد مهمة، لكن يمكن البرهان مباشرة في بعض الحالات كما هو الشأن في التمرين 4

$$\text{تمرين 7: } u_0 = 1 ; u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8}$$

لنبين بالترجع أن $u_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا: $u_0 = 1$ ، منه: $u_0 \leq 4$

نفترض أن: $u_n \leq 4$ و نبين أن: $u_{n+1} \leq 4$

$$u_n \leq 4 \Rightarrow 2u_n \leq 8 \Rightarrow 2u_n + 8 \leq 16 \Rightarrow 2u_n + 8 \leq \sqrt{16} \Rightarrow u_{n+1} \leq 4$$

يمكن أيضا استعمال تقنية الفرق، لكن يجب استعمال المرافق، كما يلي:

$$u_{n+1} - 4 = \sqrt{2u_n + 8} - 4 = \frac{2u_n + 8 - 16}{\sqrt{2u_n + 8} + 4} = \frac{2(u_n - 4)}{\sqrt{2u_n + 8} + 4} \leq 0$$

$$\text{لدينا: } u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2u_n + 8 - u_n^2$$

لنعمل الحدودية: $p(x) = -x^2 + 2x + 8$

$$\text{محددتها هي: } \Delta = 4 + 32 = 36 \quad \text{منه: } x_1 = \frac{-2 + 6}{-2} = -2 \quad \text{و } x_2 = \frac{-2 - 6}{-2} = 4$$

إذن : $p(x) = -(x+2)(x-4)$ ، إذن : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = -(u_n + 2)(u_n - 4)$
بما أن : $0 \leq u_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ فإن : $-(u_n + 2)(u_n - 4) = (u_n + 2)(4 - u_n) \geq 0$
إذن : $u_{n+1}^2 \geq u_n^2$ منه : $u_{n+1} \geq u_n$ بالتالي : u_n متتالية تزايدية.

تذكير : لتعميل الحدودية : $p(x) = ax^2 + bx + c$ نحدد جذريها (إن وجد حيث يجب أن نجد : $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$)

فيكون التعميل هو : $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ، $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$: